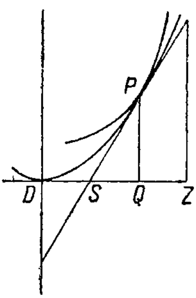
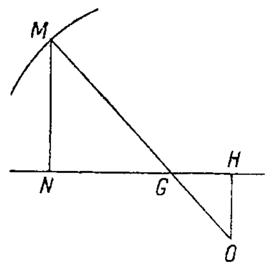
Это нетрудно доказать, основываясь на теоремах о касательных к коническим сечениям; действительно, если касательная к параболе в точке P является в то же время касательной к гиперболе с асимптотами $y=0$ и $x=a$, то P будет серединой отрезка касательной между асимптотами; кроме того, точка S, место пересечения касательной с осью абсцисс, являющейся, в свою очередь, касательной к вершине параболы, будет серединой расстояния между точкой P и точкой пересечения касательной с осью ординат. Отсюда следует, что DQ, абсцисса точки P, равна $\frac{2}{3}$ DZ. Нетрудно убедиться, что, как указывает Архимед, условие возможности

$$b^2c < \frac{4}{27}a^3$$

действительно выполняется (в задаче деления шара) в том случае, когда точка B совпадает с Q, а T лежит между Q и Z. Однако получается только одно решение, ибо точки X хотя и могут упасть по обе стороны от B, но для частной задачи, интересующей Архимеда, годится лишь точка, падающая на DB.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

Таким образом Архимед сводит свою задачу о делении шара к весьма общему кубическому уравнению; это же уравнение, как было нами указано (стр. 130), лежит в основе доказательства последней теоремы второй книги труда о шаре и цилиндре; Архимед, кроме того, пользуется им в некоторых других вопросах, касающихся нахождения сегментов эллипсоидов и гиперболоидов данного объема.

Наоборот, нахождение Аполлонием нормалей представляет собой тип задач, решаемых непосредственно с помощью конических сечений, без обращения к каким бы то ни было уравнениям. Мы ограничимся тем, что приведем здесь решение этой задачи на языке современной алгебраической символики. Пусть O будет какая-нибудь точка, (x_1, y_1) прямой, служащей нормалью к коническому сечению в точке M (x, y), G — точка пересечения этой нормали с главной осью, N — проекция точки M на ту ось, которую мы примем за ось абсцисс. Чтобы сразу охватить все частные случаи, рассматриваемые Аполлонием, мы напишем, пользуясь теперешними знаками $+$ и $-$,

$$\frac{y}{-y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG},$$

NG — это то, что теперь называют субнормалью, и в случае параболы она равна p. Поэтому найденное нами уравнение можно написать в виде:

$$xy - (x_1 - p)y - y_1 p = 0.$$